3.SELECCIÓN DE CARTERAS

En este tema se introduce la selección óptima de carteras mediante la diversificación de activos. Este análisis fue desarrollado formalmente por Markowitz en 1952 bajo el nombre "Modern Portfolio Theory".

La teoría de optimización de carteras establece un marco para la selección de activos a través de la elección entre el rendimiento y el riesgo esperados. El inversor elegirá un nivel de riesgo dependiendo de sus preferencias con respecto al mismo y buscará la cartera que mayor nivel de rendimiento tenga para ese nivel de riesgo.

Uno de los resultados más importantes de Markowitz, es que favorece la elección de oportunidades de inversión, "Frontera de Portfolios Eficientes", la cual permite reducir el conjunto de oportunidades de inversión, al deducir combinaciones de activos que simultáneamente cumplen dos condiciones:

- Ofrecen el mínimo riesgo, dentro de todas las combinaciones de activos que tiene un rendimiento esperado.

- Ofrecen el máximo rendimiento esperado, dentro de todas las combinaciones de activos que tienen un nivel de riesgo (varianza) dado.

Por otro lado muestra que a medida que se añada activos a una cartera de inversión el riesgo total de esa cartera (medido a través de la varianza de los rendimientos), disminuye de forma continua. En otras palabras invirtiendo en una cartera y no en activos individuales los inversores pueden disminuir su riesgo total sin disminuir su rendimiento esperado.

Implicaciones del análisis media-varianza:

- Cuantificar las ganancias de la diversificación
- Genera de forma precisa la inversión óptima en cada activo dado el grado de aversión al riesgo del inversor.

En este análisis de selección de cartera óptima, se va a crear una cartera de activos, formada por 10 acciones pertenecientes al IBEX-35, en la que se seleccionará el porcentaje que cada activo formará parte de la cartera para ser óptima desde el punto de vista rentabilidad-riesgo. Posteriormente incorporaremos un activo libre de riesgo para aumentar las posibilidades de inversión.

3.1. Medidas Estadísticas utilizadas en el Modelo de Selección de carteras

Las medidas necesarias para medir la rentabilidad y el riesgo de los activos son las siguientes:

Rendimiento

Dado un conjunto de activos y un conjunto de pesos que describen como está formada la cartera, la fórmula para los rendimientos esperados para *n* activos es:

$$E(r_P) = \sum_{i=1}^{n} w_i E\left(r_i\right) \tag{3.1}$$

Donde

$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ Como se puede ver, se pueden dar también valores negativos, cuando se vende un activo que fue tomado prestado, y el ingreso obtenido por su venta es utilizado para la compra de otro activo.

$n =$ nº de activos

$w_i =$ proporción de fondos invertidos en el activo *i*

$r_i, r_p =$ rendimientos del activo *i* y de la cartera *p*

Riesgo

La varianza de un activo es el valor esperado de la suma de las desviaciones al cuadrado de la media, y la desviación estándar es la raíz de la varianza. La varianza de una cartera combinación de un conjunto de activos es igual a la covarianza promedio ponderado de los rendimientos de sus valores individuales.

$$\text{Var}\left(r_p\right) = \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \text{Cov}\left(r_i, r_j\right) \tag{3.2}$$

Si expresamos todo en términos de correlación: $\text{Cov}\left(r_i, r_j\right) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j = \sigma_{ij}$

(3.3)

$$\text{Var}\left(r_p\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j \tag{3.4}$$

ρ_{ij} es la correlación entre los rendimientos de los activos *i, j*

3.2. Modelo de Selección de Carteras de Markowitz

Este modelo de selección de inversiones se basa en las siguientes características:

1. Es sólo para un período. El inversionista invierte dinero durante un periodo determinado Una vez terminado el periodo decide reinvertir esos beneficios.

2. Se encuentra en un contexto de incertidumbre, el inversionista decide desde el principio del período en que activos quiere invertir, sin conocer cuál será su rendimiento al final del periodo. Lo único que conoce es la distribución de probabilidad de esos activos.

3. Los rendimientos esperados y el riesgo que tienen en cuenta los inversores son medidos a través de los dos primeros momentos de la distribución de probabilidad de los rendimientos esperados y varianza esperada.

4. Los inversores son aversos al riesgo. Los inversionistas buscan tener un rendimiento alto y desean evitar el riesgo. Además aceptan a intercambiar riesgo por rendimiento.

5. El mercado en el que se intercambian los activos es de competencia, la información sobre todos los activos está disponible para cualquier inversor. No se consideran costes de transacción.

6. Se permite la venta a corto. Este tipo es habitual en los mercados financieros, se trata de la venta de los activos que se prestaron a la espera de una caída ene le precio de los activos. Cuando y si los precios caen el inversor compra un número equivalente de los activos al nuevo precio más bajo y devuelve a la entidad crediticia de los activos que tomó prestado.

Frontera Eficiente de Markowitz

Cada posible combinación de activos puede graficarse en un espacio rendimiento-riesgo (gráfico 3.1), y la colección de cada posible cartera define una región en este espacio. La línea del borde superior de esta región se la conoce como la frontera eficiente. Las combinaciones a lo largo de esta línea representan cartera de menor riesgo dado un nivel de rentabilidad. Por el contrario, para una cantidad de riesgo dada, la cartera de la frontera representa la combinación que ofrece mejor rentabilidad posible. Matemáticamente la frontera eficiente es la intersección del conjunto de carteras con mínima varianza y el conjunto de carteras con la máxima rentabilidad. Esta frontera, como veremos más adelante, procede del problema de optimización de la volatilidad de la cartera. La curva AVZ representa el conjunto de combinaciones posibles de la cartera. Las carteras que se encuentran en la frontera VA son posibles candidatos a mantener por los inversores (carteras eficientes). Representa el conjunto de carteras que ofrece la tasa más alta posible de rendimiento esperado para cada nivel de desviación típica de la cartera. La cartera del punto V es la cartera de mínima varianza, no es posible encontrar una cartera con una desviación típica menor.

Frontera Posibilidades de Inversión Media-Varianza

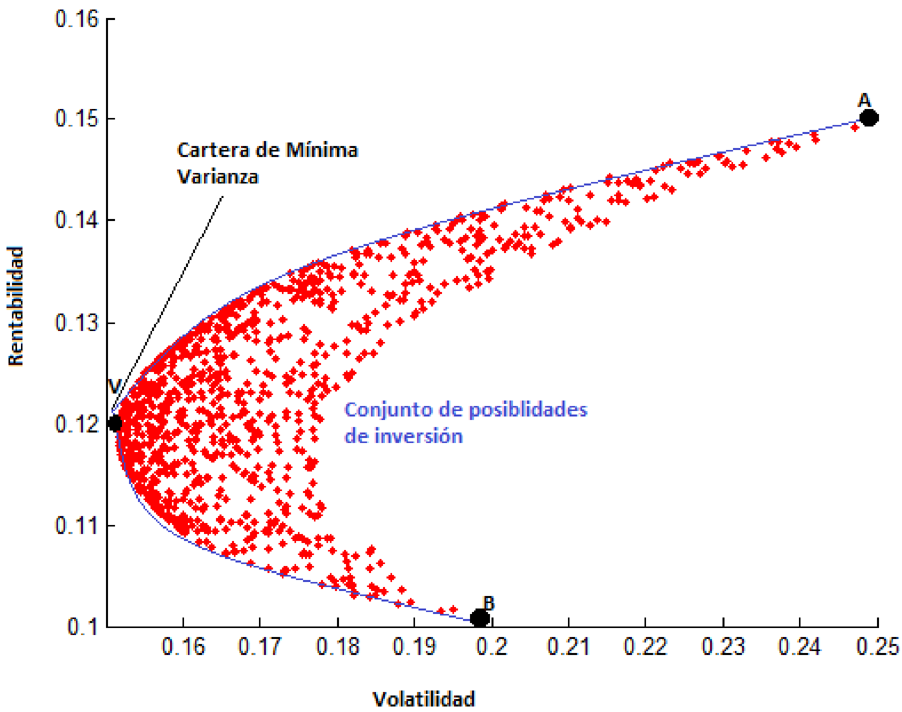

Gráfico 3.1. Frontera de posibilidades de inversión.

Frontera Eficiente de Carteras

El problema de optimización que se plantea para encontrar las ponderaciones de los activos que minimizan el riesgo para un determinado rendimiento esperado, es el siguiente:

$$\text{Min } \sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N} \sum_{h=1}^{N} w_j w_h \rho_{jh} \sigma_j \sigma_h \qquad (3.5)$$

s.a

$$\sum_{j=1}^{N} w_j E(R_j) = E(R_e)$$

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_N = 1$$

Donde σ_p^2 es la varianza de la cartera óptima, dada la solución al problema de minimización

Este problema de optimización se resuelve mediante la técnica de multiplicadores de Lagrange.

$$\Im = \sigma_p^2 + 2\lambda_1 \left[E(R_e) - \sum_{j=1}^{N} \omega_j (R_j) \right] + 2\lambda_2 \left[1 - \sum_{j=1}^{N} \omega_j \right] \tag{3.6}$$

donde λ_1 y λ_2 son los multiplicadores de Lagrange

Teorema de dos Fondos (SHARPE, 1960)

Si se considera la posibilidad de que el inversor no sólo pueda invertir en la cartera de acciones pertenecientes al IBEX-35 sino que también pueda invertir en un activo libre de riesgo[1] sus posibilidades de inversión se ven incrementadas.

A los supuestos de partida del modelo de Markowitz se le añaden:

1. Existe una tasa libre de riesgo, en la que el inversor puede prestar y pedir prestado.

2. La tasa libre de riesgo es la misma para todos los inversores.

Esta cartera óptima (T) se obtendrá trazando una línea recta cuyo valor de la ordenada del origen, es la tasa de rendimiento del activo libre de riesgo, y es tangente a la curva de varianza mínima de los activos con riesgo. (Ver gráfico 3.2). La recta se llama “Línea del Mercado de Capitales”, y representa las correspondientes combinaciones del activo libre de riesgo con cada uno de los portfolios de la frontera eficiente. La pendiente positiva representa cuanto rendimiento adicional se puede esperar por cada nivel de riesgo adicional que se acepte.

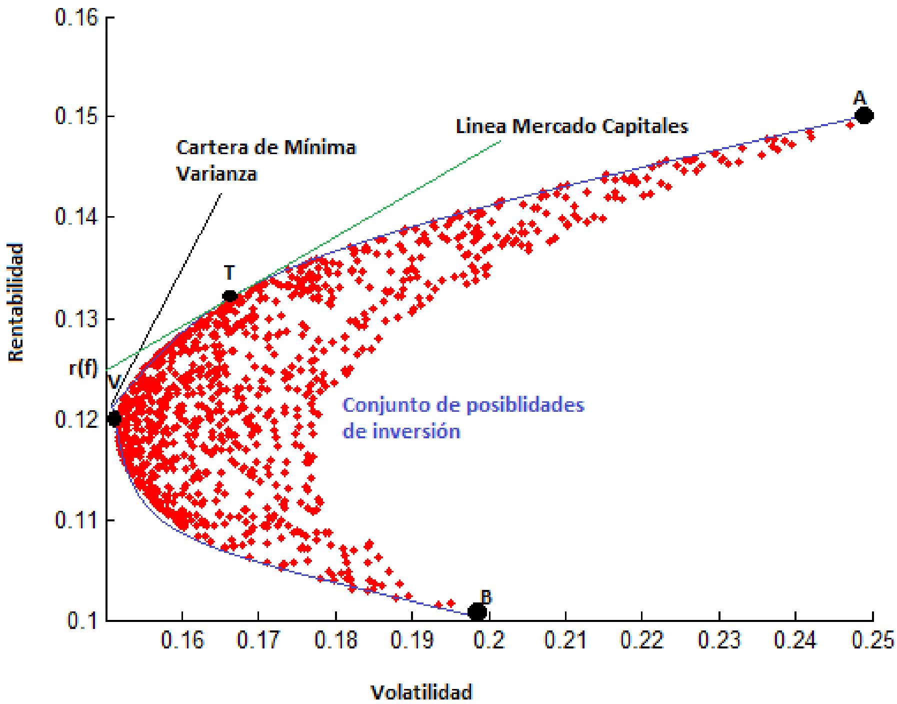

Gráfico 3.2. Portfolio tangente

[1] Un activo libre de riesgo es aquel que se sabe exactamente, desde el principio, cuál será su valor al final del periodo, No existe incertidumbre sobre su valor final, y por tanto de su rendimiento.

Analíticamente,

Sea ω la ponderación invertida en la cartera tangente *T* Y $(1-\omega)$ la asignada al activo seguro con rendimiento *r*. El rendimiento esperado de cualquier cartera eficiente *p* es:

$$E(R_p) = \omega E(R_T) + (1-\omega)r \tag{3.7}$$

y la volatilidad

$$\sigma_p = \omega\sigma_T ;\ (1-\omega) \leq 1 \tag{3.8}$$

despejando se obtiene la relación entre el rendimiento esperado y la volatilidad de cualquier cartera

$$E(R_p) = r + \left(\frac{E(R_T) - r}{\sigma_T}\right)\sigma_p \tag{3.9}$$

Cuando $\omega = 1$, todos los recursos de la cartera se destinan a los activos inciertos (acciones), mientras que si $\omega = 0$ todos los recursos se destinan al activo seguro.

Por tanto, para encontrar el portfolio eficiente se resuelve el siguiente problema de maximización:

$$\underset{\{\omega_{jT},\, j=1,..,N\}}{\text{Max}} \ \sigma_T = \frac{\left(E(R_T) - r\right)}{\sigma_T} \tag{3.10}$$

s.a

$$\sum_{j=1}^{N} w_{jT} = 1$$

3.3. Aplicación práctica sobre acciones del IBEX-35

Para analizar el tema de selección de carteras hemos seleccionado 10 acciones que forman parte del IBEX-35: Santander, Telefónica, BBVA, Endesa, Repsol, Iberdrola, Inditex, Banco Popular, ACS y Gas Natural. Los datos utilizados son mensuales para un período de 3 años, Enero 2009 a Diciembre 2011

En el Gráfico 3.3 se muestra la relación entre volatilidad y rendimiento de cada uno de los activos. Como se puede ver Inditex es el activo con mayor rentabilidad, con casi un 3% mensual para el periodo

2009-2011. Por otro lado, el activo con mayor riesgo es el Banco Popular con casi un 16% de volatilidad mensual en este período de análisis.

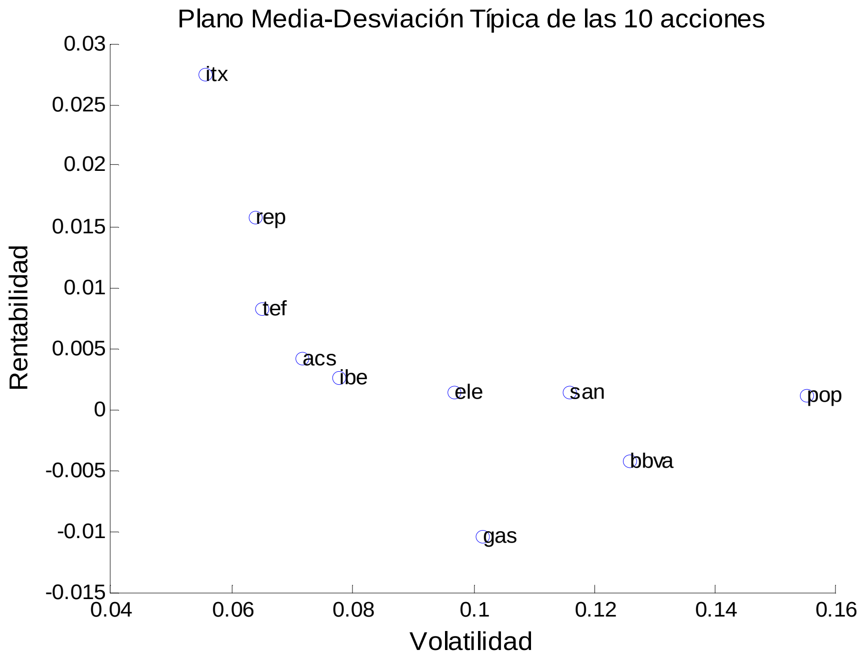

Gráfico 3.3. Relación entre la desviación Típica y la rentabilidad media para las 10 acciones del IBEX-35 para el periodo 2009-2011

Al construir carteras equiponderadas comenzando por una cartera compuesta únicamente por el activo Santander, después una segunda cartera formada por Santander y Telefónica y así sucesivamente, podemos ver que la volatilidad tiende a disminuir, salvo cuando introducimos acciones de los bancos (BBVA y Banco Popular). Esto se debe a la crisis en la que estamos sumergidos, que comenzó en el 2008 y continua en la actualidad, y que tiene su origen en el mercado financiero. Véase Tabla 3.1, y Gráfico 3.4

Tabla 3.1. Volatilidad de carteras equiponderadas, formadas por 10 acciones del IBEX-35

	SAN	TEF	BBVA	ELE	REP	IBE	ITX	POP	ACS	GAS	VOLATILIDAD
Cartera 1	x										12.02%
Cartera 2	x	x									9.77%
Cartera 3	x	x	x								10.93%
Cartera 4	x	x	x	X							10.61%
Cartera 5	x	x	x	X							10.14%
Cartera 6	x	x	x	X	x	x					9.87%
Cartera 7	x	x	x	X	x	x	x				9.46%
Cartera 8	x	x	x	x	x	x	x	x			10.68%
Cartera 9	x	x	x	x	x	x	x	x	x		10.35%
Cartera 10	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	10.27%

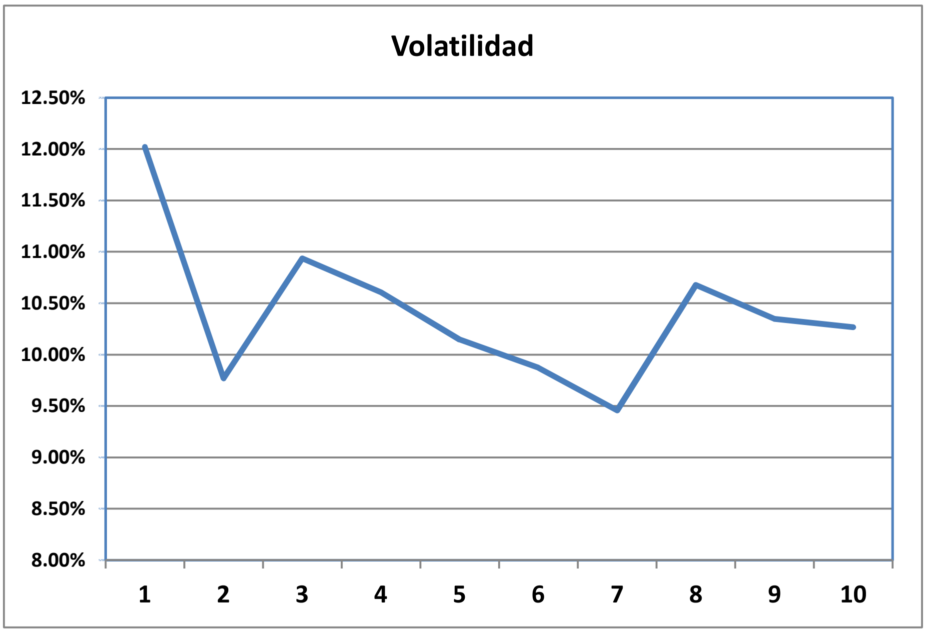

Gráfico 3.4. Representación gráfica de la volatilidad de las carteras equiponderadas

A continuación resolvemos el problema de minimización de la varianza de la cartera para encontrar la frontera eficiente (ecuación 3.5). El gráfico 3.5 muestra la frontera eficiente de posibilidades de inversión para nuestra cartera de acciones. Esta frontera representa el conjunto de carteras con menor varianza dada una rentabilidad, y las carteras con mayor rentabilidad para un determinado nivel de riesgo.

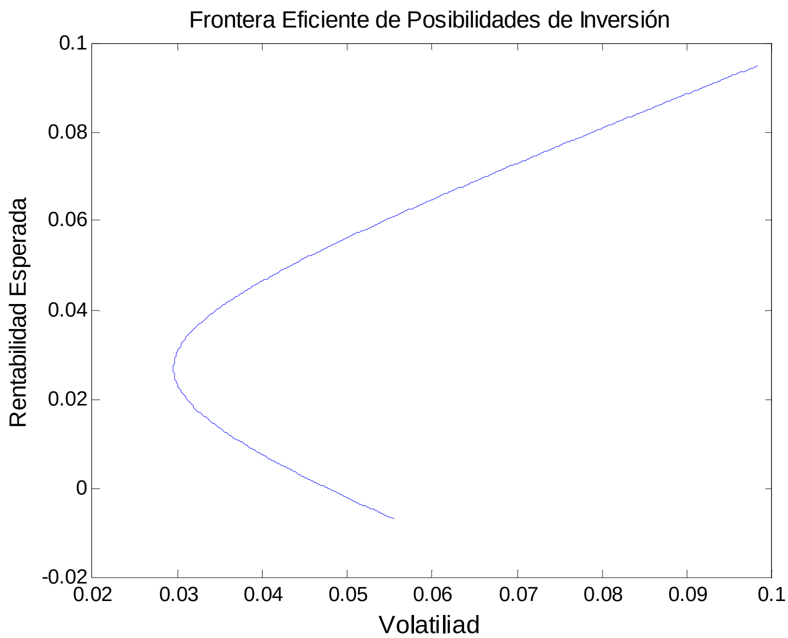

Gráfico 3.5. Frontera Eficiente de Posibilidades de Inversión que minimizan el riesgo.

Hemos encontrado el conjunto de posibilidades de inversión de nuestra cartera, sin embargo ahora queremos encontrar la cartera con mínima varianza. Esto se obtiene resolviendo el siguiente problema de optimización (es el mismo que el presentado en la ecuación 3.5 pero quitando la restricción sobre la tasa de rendimiento):

$$\text{Min } \sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{N}\sum_{h=1}^{N} w_j w_h \rho_{jh} \sigma_j \sigma_h \qquad (3.7)$$

s.a

$$w_1 + w_2 + \ldots + w_N = 1$$

En el gráfico 3.6 podemos observar la composición de la cartera de mínima varianza. Los activos en los que se tiene más posición son Repsol e Inditex, con un 65,9% y un 50,46% respectivamente. Por otro lado, las acciones BBVA e Iberdrola se venden a corto, dado su mayor riesgo. La rentabilidad de la cartera esperada será del 2.70% con una volatilidad del 2.96%

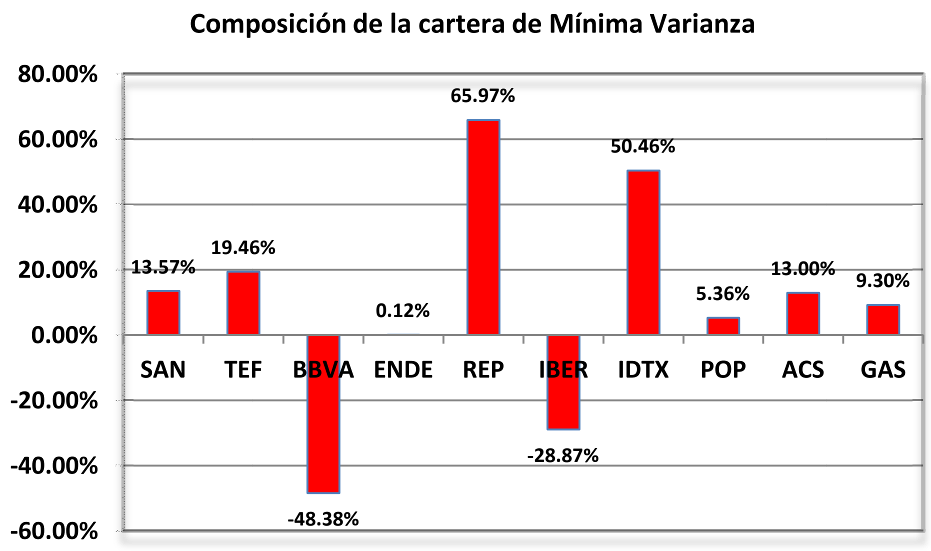

Gráfico 3.6. Composición de la cartera con mínima varianza.

Si ahora se considera la posibilidad de que podemos invertir en un activo libre de riesgo con una rentabilidad del 3% anual (0.25% mensual), la cartera óptima será aquella que sea tangente con la frontera eficiente de posibilidades de inversión. (Ver gráfico 3.7). La rentabilidad esperada de la cartera es de 3.98% con una volatilidad del 3.74%.

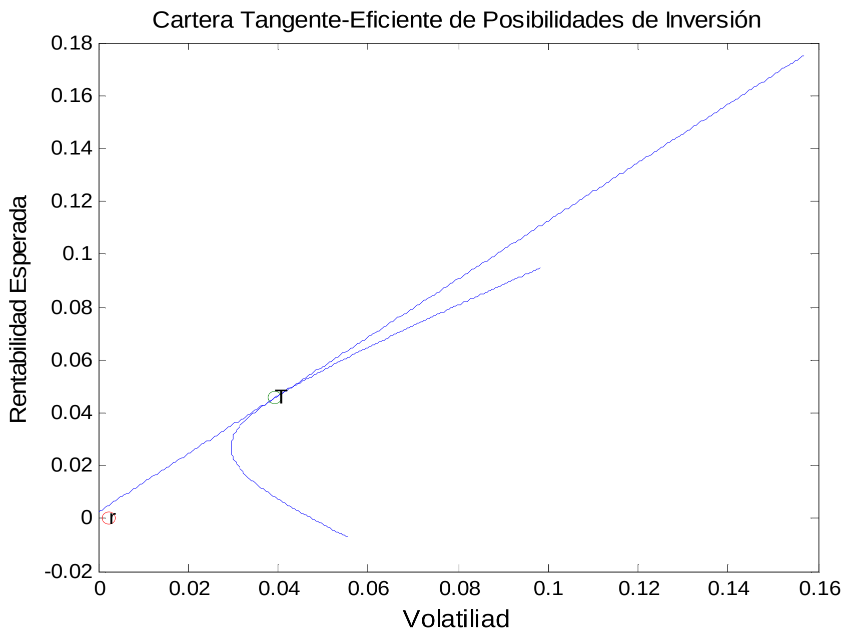

Gráfico 3.7. Cartera óptima tangente considerando el activo libre de riesgo.

En el gráfico 3.8 se observa como Repsol e Inditex son los activos tienen más peso en la cartera, con un 135.76% y un 61.90% respectivamente, mientras que BBVA e Iberdrola son las acciones que se venden a corto en mayor medida.

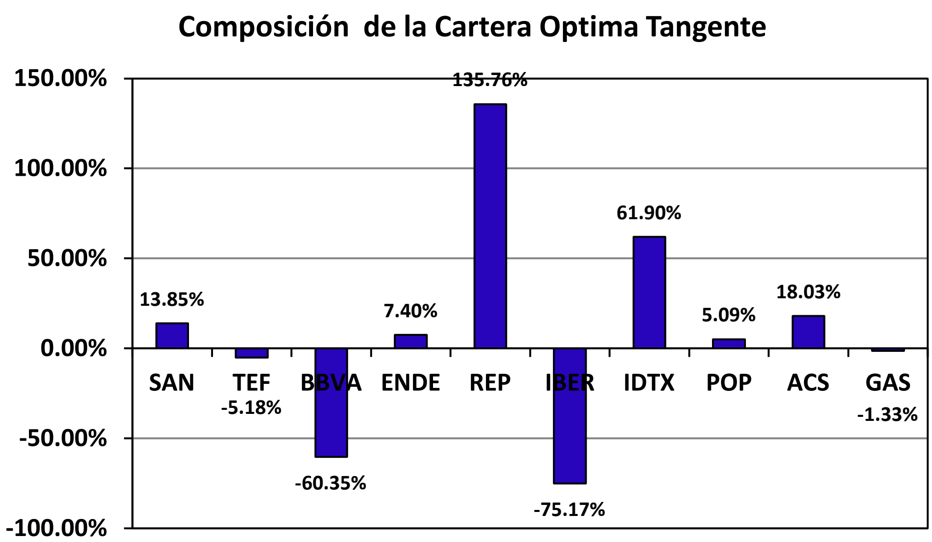

Gráfico 3.7. Composición de la cartera óptima tangente considerando el activo libre de riesgo.

Si comparamos las composiciones de la cartera óptima, considerando sólo las acciones, y la cartera óptima considerando también el activo libre de riesgo, podemos ver que existen ciertas diferencias. La mayor diferencia se da en el activo Repsol, ya que se en la cartera tangente, creada a partir de la posibilidad de invertir en un activo libre de riesgo, aumenta su porcentaje en más de un 100%. (Ver gráfico 3.8)

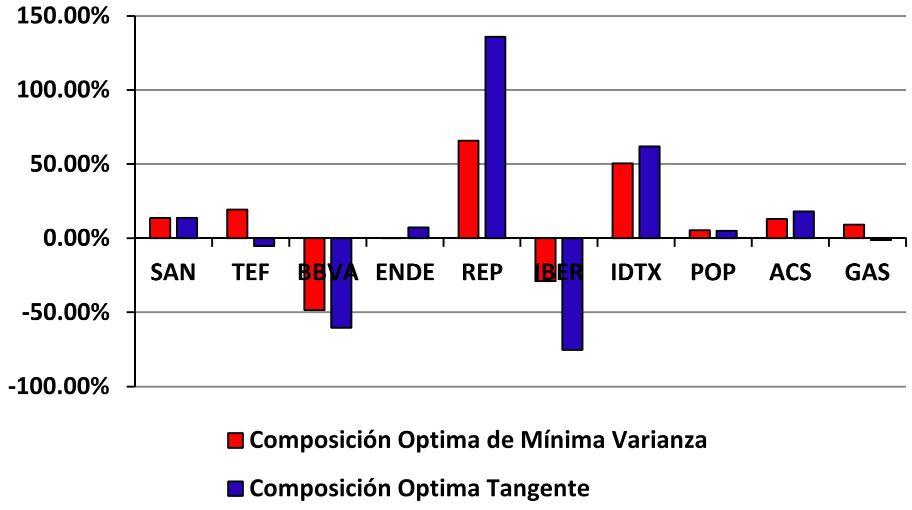

Gráfico 3.8. Comparación de la cartera óptima de mínima varianza y la cartera óptima tangente.